

Magnetohidrodinamica

Ioana Duțan

Institutul Astonomic al Academiei Romane, București

March 13, 2012

SUMAR

INTRODUCERE

MHD NERELATIVISTA

- Ce este magnetohidrodinamica (MHD) ?
- MHD nerelativista
- MHD relativista
- MHD in relativitatea generala

SUMAR

INTRODUCERE

MHD NERELATIVISTA

- Ce este magnetohidrodinamica (MHD) ?
- MHD nerelativista
- MHD relativista
- MHD in relativitatea generala

SUMAR

INTRODUCERE

MHD NERELATIVISTA

- Ce este magnetohidrodinamica (MHD) ?
- MHD nerelativista
- MHD relativista
- MHD in relativitatea generala

SUMAR

INTRODUCERE

MHD NERELATIVISTA

- Ce este magnetohidrodinamica (MHD) ?
- MHD nerelativista
- MHD relativista
- MHD in relativitatea generala



SUMAR

INTRODUCERE

Intro Slide

Ecuatiile MHD

Ecuatiile Maxwell

Clasificare

**MHD NERELA-
TIVISTA**

CE ESTE MAGNETOHIDRODINAMICA (MHD) ?

Ce este magnetohidrodinamica (MHD) ?

SUMAR

INTRODUCERE

Intro Slide

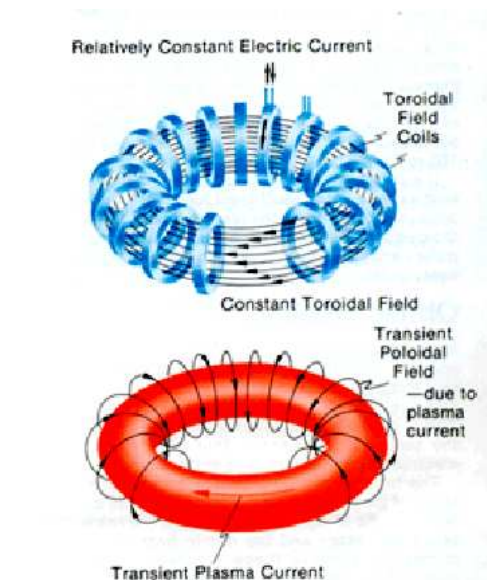
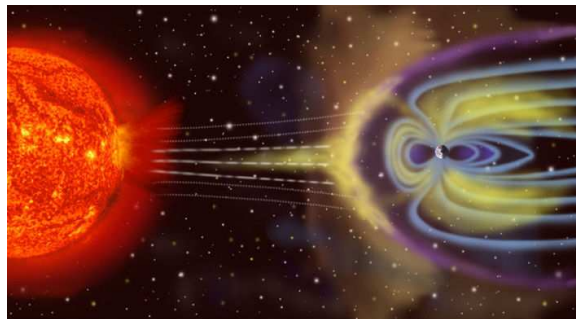
Ecuatiile MHD

Ecuatiile Maxwell

Clasificare

MHD NERELATA-
TIVISTA

- teorie care descrie interactia macroscopica dintre un fluid conductor electric si un camp magnetic (**dinamica fluidului + electromagnetism**)
- aplicabilitate in multe domenii
 - inginerie (e.g., confinarea plasmei)
 - geofizica
 - astrofizica



Ce este magnetohidrodinamica (MHD) ?

SUMAR

INTRODUCERE

Intro Slide

Ecuatiile MHD

Ecuatiile Maxwell

Clasificare

MHD NERELATA-
TIVISTA

- MHD descrie evolutia “lenta” a unui fluid conductor electric, plasma, alcatuit din e^- si p
- **evolutie lenta** = timpi caracteristici sunt mult mai lungi decat cei pentru care particulele sunt importante ca entitati (e.g., perioada de giro-rotatie, frecventa plasmei, frecventa de coliziune) – singur fluid
- **densitatea de masa**; concentratiile de electroni si protoni sunt egale; protonii contribuie la masa fluidului
- **viteza fluidului**; viteza centrului de masa a tuturor particulelor aflate in vecinatatea unui punct; practic viteza protonilor; electronii se pot deplasa cu viteze diferite fata de protoni, producand astfel un curent
- **presiunea** este data de suma presiunilor electronilor si a protonilor
- **campul magnetic** este important in MHD; densitatea de curent si campul electric se determina din acesta (si nu invers)

SUMAR

INTRODUCERE

Intro Slide

Ecuatiile MHD

Ecuatiile Maxwell

Clasificare

MHD NERELATIVISTA

- MHD se bazeaza pe un set de ecuatii care cupleaza campul magnetic \mathbf{B} cu viteza fluidului (plasmei) \mathbf{v} , densitatea de masa ρ si presiunea termica p
- ecuatiile MHD:
 - ecuatia de continuitate/conservarea masei
 - **ecuatia de miscare**/conservarea impulsului
 - conservarea energiei
 - **legea inductiei** din ecuatiile lui Maxwell (variatia campului magnetic in timp)
 - inexistenta monopolilor magnetici (conditie impusa)
 - ecuatia de stare pentru fluid (“inchide” sistemul de ecuatii)

Ecuatiile lui Maxwell

Ecuatiile lui Maxwell (sunt relativiste !)

- in vid: $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $c = (\epsilon_0\mu_0)^{-1/2}$
- ρ_e densitatea de sarcina, \mathbf{j} densitatea de curent, \mathbf{E} intensitatea campului electric

- $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}$, legea lui Gauss

- $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, legea lui Gauss pentru magnetism – inexistentia monopolilor magnetici

- $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, legea inductiei (a lui Faraday) – camp electric din camp magnetic variabil in timp

- $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, legea lui Ampère – camp magnetic din curent si din camp electric variabil in timp

SUMAR

INTRODUCERE

Intro Slide

Ecuatiile MHD

Ecuatiile Maxwell

Clasificare

MHD NERELATIVISTA

SUMAR

INTRODUCERE

Intro Slide

Ecuatiile MHD

Ecuatiile Maxwell

Clasificare

MHD NERELATIVISTA

- MHD nerelativista: $v \ll c$
e.g., jeturi stelare, galaxii, ejectii solare
- MHD relativista: $v \sim c$ + spatiul Minkowsky
e.g., propagarea jeturilor de la gaurile negre, discuri de acretie
- MHD in relativitatea generala: $v \sim c$ + spatiul curb
e.g., formarea jeturilor de la gaurile negre/stele neutronice



SUMAR

INTRODUCERE

MHD NERELATIVISTA

Simplificari

Legea lui Ohm

Legea inductiei

Campul electric

Ecuatiile MHD

Frozen-in

Forta Lorentz

Unde MHD

MHD NERELATIVISTA

Simplificari

SUMAR

INTRODUCERE

MHD NERELATIVISTA

Simplificari

Legea lui Ohm

Legea inductiei

Campul electric

Ecuatiile MHD

Froze-in

Fora Lorentz

Unde MHD

- $v \ll c \Rightarrow$ pentru procese lente se poate neglija $\partial_t \mathbf{E} \Rightarrow \boxed{\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}}$
- aplicam divergenta rotorului (este nula) $\Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \mathbf{j} = 0}$, nu exista acumulare (locala) de sarcina \Rightarrow curenti curbilinii
- densitatea de energie magnetica domina asupra densitatii de energie electrica
- plasma este neutra d.p.d.v. electric $\Rightarrow \rho_e = 0$

Legea lui Ohm

SUMAR

INTRODUCERE

MHD NERELATIVISTA

Simplificari

Legea lui Ohm

Legea inductiei

Campul electric

Ecuatiile MHD

Frozen-in

Fora Lorentz

Unde MHD

- in general: $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, σ conductivitatea electrica
- pentru ca plasma se deplaseaza cu viteze nerelativiste fata de campul electric si campul magnetic, \mathbf{j} va fi datorata pe de o parte campului electric, iar pe de alta parte transformarii la un sistem de referinta inertial:

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

SUMAR

INTRODUCERE

MHD NERELATIVISTA

Simplificari

Legea lui Ohm

Legea inductiei

Campul electric

Ecuatiile MHD

Frozen-in

Fora Lorentz

Unde MHD

Se foloseste prin eliminarea lui \mathbf{E} si \mathbf{j}

● $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \frac{\mathbf{j}}{\sigma}$

● $\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \left(-\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \frac{\mathbf{j}}{\sigma} \right) = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}),$
unde $\eta = 1/(\mu_0 \sigma)$ coeficientul de difuzie magnetica

● folosind $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{B}$

● legea inductiei: $\partial_t \mathbf{B} = \nabla (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B}$

● termenul 1: generarea de camp magnetic prin deplasarea plasmei si din campul magnetic existent; Atentie ! Campul este amplificat si nu creat

● termenul 2: descrie difuzia magnetica; in astrofizica, in general se poate neglija – scara de lungime e foarte mare

● numarul Reynolds magnetic: $\mathcal{R}_m = \frac{Lv}{\eta}$

Interpretarea campului electric

SUMAR

INTRODUCERE

MHD NERELATIVISTA

Simplificari

Legea lui Ohm

Legea inductiei

Campul electric

Ecuatiile MHD

Frozen-in

Fora Lorentz

Unde MHD

Avem doi termeni care determina campul electric:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \frac{\mathbf{j}}{\sigma}$$

e.g., valori tipice pentru Soare: $v = 10^3$ m/s si $B = 10^3$ G

termenul 1 va produce un camp electric de ordinul:

$$E_{\mathbf{v} \times \mathbf{B}} \sim vB \sim 10^2 \text{ V/m}$$

termenul 2 va produce un camp electric de ordinul:

$$E_{\mathbf{j}/\sigma} \sim \frac{1}{\sigma\mu_0} \frac{B}{l} \sim 10^{-5} \text{ V/m}$$

unde $l = 10^7$ m si $\sigma = 10^3$ Ω/m

SUMAR

INTRODUCERE

MHD NERELATIVISTA

Simplificari

Legea lui Ohm

Legea inductiei

Campul electric

Ecuatiile MHD

Frozen-in

Fora Lorentz

Unde MHD

Dinamica fluidelor:

- **ecuatia de continuitate**: materia nici nu se creaza, nici nu se distruge:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0$$

unde $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$, **derivata Lagrange** care descrie derivata in raport cu timpul ca o cantitate care se deplaseaza o data cu fluidul

- **ecuatia de miscare**:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \nabla \cdot) \mathbf{v} = -\nabla p + \mathcal{F}$$

unde \mathcal{F} suma fortelor externe care actioneaza asupra unitatii de volum de fluid (e.g., gravitatie, viscozitate)

SUMAR

INTRODUCERE

MHD NERELATIVISTA

Simplificari

Legea lui Ohm

Legea inductiei

Campul electric

Ecuatiile MHD

Frozen-in

Fora Lorentz

Unde MHD

Dinamica fluidelor:

- conservarea energiei:

$$\frac{\rho^\gamma}{\gamma - 1} \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = -\mathcal{L},$$

unde γ indicele adiabatic si \mathcal{L} reprezinta energia pierduta/castigata
(= 0 pentru procese adiabatice)

- ecuatia de stare (necesara pentru a “inchide” sistemul de ecuatii):

$$p = \frac{k_B}{m} \rho T$$

Ecuatiile MHD

SUMAR

INTRODUCERE

MHD NERELATIVISTA

Simplificari

Legea lui Ohm

Legea inductiei

Campul electric

Ecuatiile MHD

Frozen-in

Fora Lorentz

Unde MHD

● **ecuatia de continuitate:** $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0,$

● **ecuatia de miscare:** $\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \nabla \cdot) \mathbf{v} = -\nabla p + \mathcal{F} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$
fora Lorentz = cupleaza dinamica fluidelor cu electrodinamica

● **conservarea energiei:** $\frac{\rho^\gamma}{\gamma-1} \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = -\mathcal{L},$

unde $\mathcal{L} = \nabla \cdot q + \mathcal{L}_r - \frac{j^2}{\sigma} - H,$

q = fluxul de caldura datorat conductiei termice

\mathcal{L}_r = energia pierduta prin radiatie

j^2/σ = disiparea ohmica

H = suma tuturor surselor de caldura

● **legea inductiei:** $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B}$

Ecuatiile MHD

SUMAR

INTRODUCERE

MHD NERELATIVISTA

Simplificari

Legea lui Ohm

Legea inductiei

Campul electric

Ecuatiile MHD

Frozen-in

Fora Lorentz

Unde MHD

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \nabla \cdot) \mathbf{v} = -\nabla p + \mathcal{F}_g + \mathcal{F}_v + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

T1 **T2** **T3** **T4** **T5**

$$\frac{T1}{T2} : M^2 = \frac{v^2}{\gamma p / \rho} = \left(\frac{v}{c_s} \right)^2, \quad \text{Mach number}$$

$$\frac{T2}{T5} : \beta = \frac{p}{B^2 / \mu_0}, \quad \text{plasma beta}$$

$$\frac{T1}{T5} : M_A^2 = \left(\frac{v}{v_A} \right)^2, \quad \text{Alfvén Mach number}$$

$$\frac{T3}{T2} : \frac{L}{H_p} = \frac{L\rho}{gp}, \quad \text{pressure high scale}$$

$$\frac{T1}{T4} : \mathcal{R}_e = \frac{vL}{\nu}, \quad \text{Reynolds number}$$

Teorema frozen-in

SUMAR

INTRODUCERE

MHD NERELATIVISTA

Simplificari

Legea lui Ohm

Legea inductiei

Campul electric

Ecuatiile MHD

Frozen-in

Fora Lorentz

Unde MHD

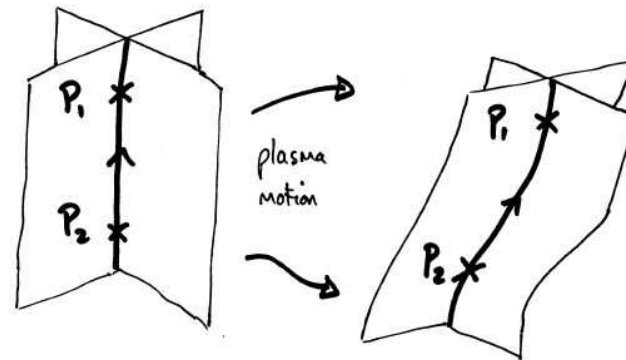
● MHD ideala:

- plasma supraconductoare ($\sigma \rightarrow \infty$): $\mathcal{R}_m \gg 1$

$$\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{E} = -\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}$$

Campul electric in comoving frame este nul, iar campul electric se inlocuieste cu cel magnetic.

- teorema frozen-in (teorema Alfvén): Fluxul campul magnetic printr-un element de fluid (care se deplaseaza) se conserva \Rightarrow liniile de camp magnetic se misca o data cu fluidul



SUMAR

INTRODUCERE

MHD NERELATIVISTA

Simplificari

Legea lui Ohm

Legea inductiei

Campul electric

Ecuatiile MHD

Frozen-in

Forța Lorentz

Unde MHD

- forța Lorentz $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ este perpendiculară pe liniile de câmp magnetic
- deplasarea și variațiile de densitate de-a lungul liniilor de câmp trebuie să fie produse de către alte forțe
- rescriem forța Lorentz doar în funcție de \mathbf{B} : $\mathbf{j} \times \mathbf{B} = (\nabla \times \mathbf{B}) \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}$
- utilizăm identitatea pentru produsul vectorial:

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right)$$

- termenul 1 poate fi interpretat ca o forță datorată unei **tensiuni magnetice**, $T_m = \frac{B^2}{\mu_0}$, pe unitatea de suprafață care acționează asupra liniei de câmp
- termenul 2 reprezintă gradientul unei **presiuni magnetice**

Unde MHD

SUMAR

INTRODUCERE

MHD NERELATIVISTA

Simplificari

Legea lui Ohm

Legea inductiei

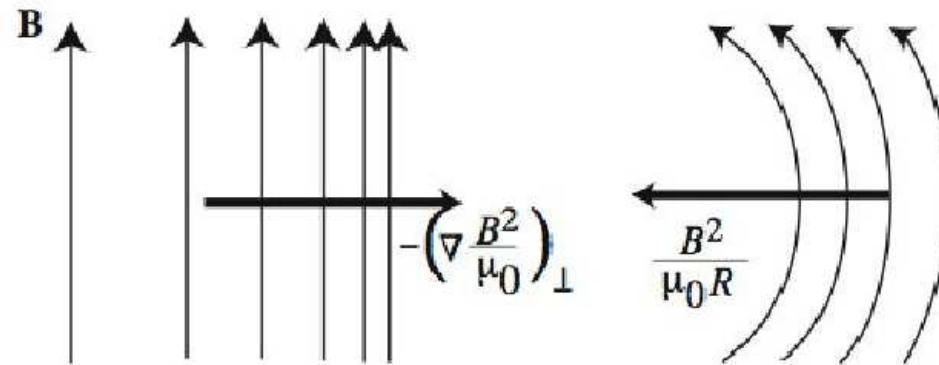
Campul electric

Ecuatiile MHD

Frozen-in

Fora Lorentz

Unde MHD



The force due to magnetic pressure is shown on the left. The curvature force due to magnetic tension is shown on the right. Both are perpendicular to the field lines. This figure is taken from Kip Thorne's notes.

- tensiunea magnetica da nastere **undelor Alfvén** care se propaga de-a lungul liniei de camp magnetic cu o viteza caracteristica data de:

$$v_A = \sqrt{\frac{T_m}{\rho}} = \sqrt{\frac{B^2}{\mu_0 \rho}}$$

Unde MHD

SUMAR

INTRODUCERE

MHD NERELATIVISTA

Simplificari

Legea lui Ohm

Legea inductiei

Campul electric

Ecuatiile MHD

Frozen-in

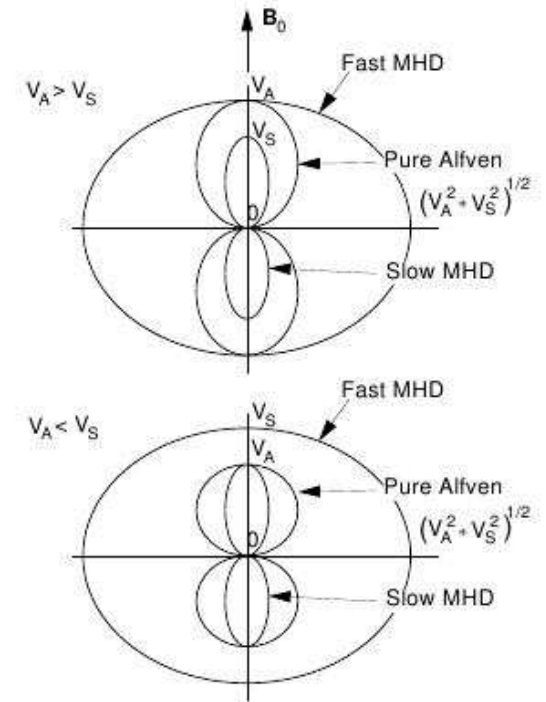
Fora Lorentz

Unde MHD

fast magnetosonic (FMS) waves + slow magnetosonic (SMS) wave

● **FMS**: forta de revenire este data de o combinatie a presiunii plasmei si cea a presiunii magnetice

● **SMS**: forta de revenire este data doar de presiunea plasmei ca la undele sonore in ecuatiile Navier-Stokes; presiunea magnetica lipseste pentru ca, in acest caz, gradientii apar de-a lungul liniei de camp, unde presiunea magnetica nu exercita nicio forta



Wave normal diagrams for the fast, slow and pure Alfvén waves for (a) $V_A > V_S$ and (b) $V_A < V_S$. The length of the radius from the origin to a point on the associated closed curve is proportional to the wave phase velocity